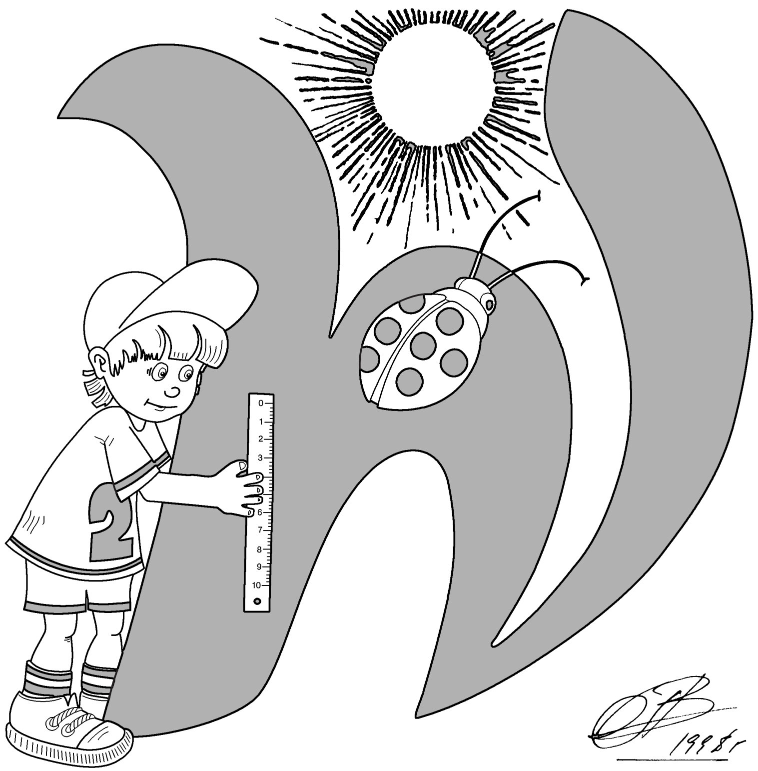
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2000/2001 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторский коллектив — Варгин А., Компанец Р., Любшин Д., Мельниковский Л., Турин В., Чивилев В, Чудновский А., Шведов О.

Общая редакция — Слободянин В.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Макаров А., Кулигин Л.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:41.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Плот

Деревянный плот оттолкнули от берега так, что в начальный момент времени его скорость оказалась равной v_0 и направленной перпендикулярно берегу. Траектория плота показана на рисунке. Крестиком отмечено место, в котором плот оказался через некоторое время T после начала движения. Считайте скорость реки постоянной и всюду равной u. Графически найдите точки траекории плота, в которых он оказался в моменты времени $2T$, $3T$ и $4T$.

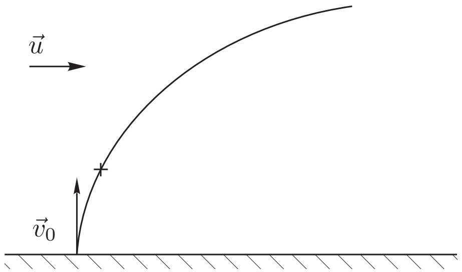


Рис. 1

Задача 2. Тело на плоскости

Тело, двигающееся по горизонтальной поверхности, за промежуток времени t_1 прошло путь S_1. Какой путь S_2 может пройти тело за последующий промежуток времени t_2? Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен μ.

Задача 3. Вольтметры

В схеме, изображенной на рисунке, все вольтметры одинаковые. Найдите показания вольтметров, считая, что сила тока через вольтметр прямо пропорциональна напряжению. Сопротивления вольтметров много больше всех остальных сопротивлений в схеме. Сопротивление каждого из резисторов $R = 10$ Ом, напряжение на входе $U = 4{,}5$ В.

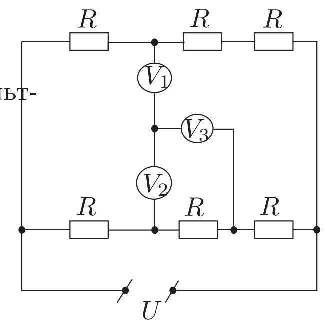


Рис. 2

Задача 4. Зеркала

Два плоских зеркала, каждое из которых имеет форму квадрата со стороной a, сложены под прямым углом. Точечный источник света S располагается на расстоянии a от каждого из зеркал (вид сверху показан на рисунке). Заштрихуйте области, находясь в которых, наблюдатель сможет увидеть ровно n изображений источника S, если $n = 0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5$.

10 класс

Задача 1. Электроманометр

Для исследования неизвестного газа был специально разработан «электроманометр» — прибор, состоящий из слабо электропроводной U–образной трубки, заполненной ртутью. Электрическое сопротивление R между клеммами такого манометра пропорционально разности давлений P в его коленах и равно $R = kP$. С его помощью контролируется давление в сосуде с поршнем (рис. 4). К клеммам манометра подключены последовательно амперметр и батарея с малым внутренним сопротивлением. На экспериментальном графике (рис. 5)изображен производимый над газом процесс $KLMNOPQ$ в координатах: работа W, совершенная поршнем — сила тока I, показываемая амперметром. Найдите объем V_Q, занимаемый газом к концу эксперимента (в точке Q). Начальный объем газа $V_K = 1$ л, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В, коэффициент $k = 3 \cdot 10^{-3}$ Ом/Па. Объемом манометра и подводящих трубок можно пренебречь.

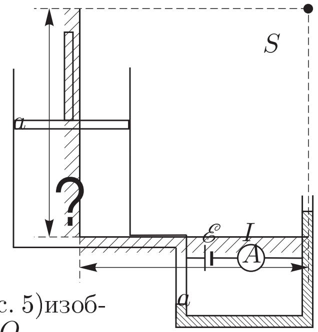


Рис. 4

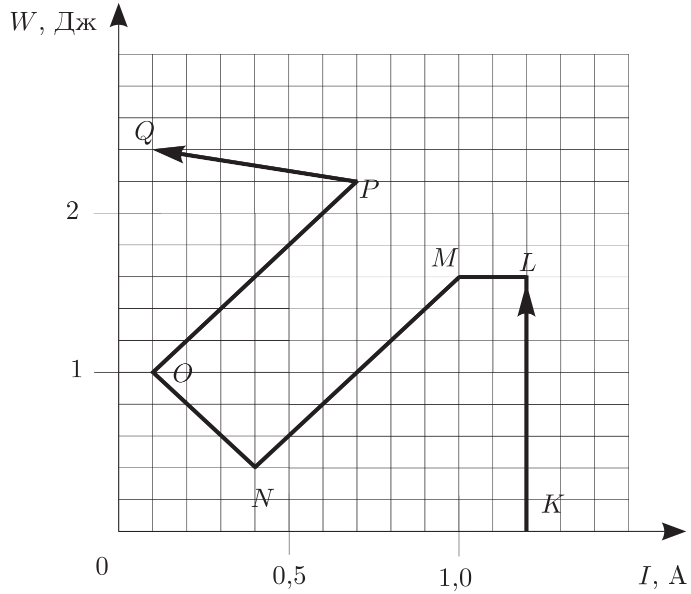


Рис. 5

Задача 2. Тело в воздушном потоке

Тело массы m удерживают неподвижно в воздушном потоке, движущемся со скоростью u. В некоторый момент тело отпускают без начальной скорости, траектория его движения изображена на рисунке. В установившемся режиме тело падает с постоянной скоростью под углом β к горизонту. Под каким углом γ к горизонту тело начало двигаться? Сила сопротивления воздуха, действующая на тело, пропорциональна квадрату скорости тела относительно воздуха и направлена противоположно ей.

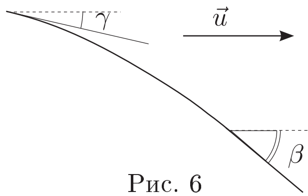


Рис. 6

Задача 3. Вращающаяся система

Горизонтальная ось OO' может свободно вращаться в подшипниках. Перпендикулярно к ней симметрично прикреплены три одинаковые легкие спицы, составляющие друг с другом угол 120°. На концы спиц насажены одинаковые маленькие шарики A, B, и C. К шарику A на длинной нерастяжимой легкой нити подвешен груз массы m. В первом эксперименте ось OO' повернули так, что спица с шариком A оказалась горизонтальной (рис. 7).

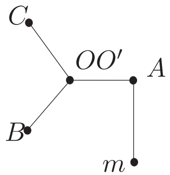


Рис. 7

После того как систему отпустили без начальной скорости, груз m начал опускаться с ускорением a_1. Во втором эксперименте ось OO' повернули так, что шарики A и B оказались на одной высоте (рис. 8). Каким будет ускорение $\vec{a}_2$ груза m сразу после того, как систему вновь отпустят без начальной скорости?

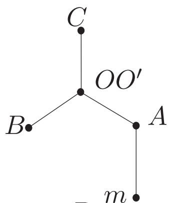


Рис. 8

Задача 4. Брусок в конденсаторе

В горизонтально расположенный плоский конденсатор до середины вставлен непроводящий брусок, который может скользить без трения внутри конденсатора. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. В некоторый момент времени брусок без толчка отпускают. Найдите зависимость скорости бруска v от времени и постройте ее график. Геометрические размеры бруска — $a \times a \times d$, диэлектрическая проницаемость — ε, плотность — ρ. Расстояние между пластинами конденсатора — d, их размеры — $a \times a$.

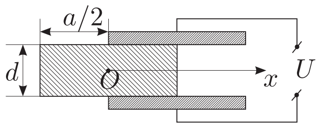


Рис. 9

Задача 5. Черный ящик

В школьной лаборатории экспериментатор Глюк исследовал электрический «черный ящик» с четырьмя выводами. Известно, что электрическая схема внутри ящика состоит только из резисторов. Глюк получил следующие результаты: $R_{AB} = 27$ кОм, $R_{AD} = 120$ кОм, $R_{BC} = 41$ кОм, $R_{CD} = 52$ кОм. Дома Глюк заметил, что он не замерил сопротивления между выводами (A,C). Определите сопротивление R_{AC}.

11 класс

Задача 1. Лодка

На рисунке показана траектория движения лодки, которую оттолкнули от берега реки так, что в начальный момент ее скорость $v_0 = 1{,}0$ м/с была направлена перпендикулярно берегу. Первым крестом на рисунке помечена точка, где лодка была через 1 с, вторым — через 2 с. Определите скорость течения реки u.

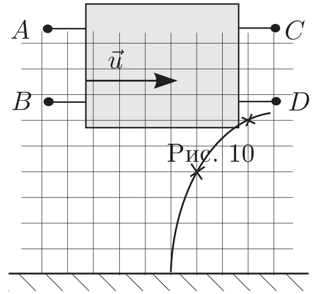


Рис. 10

Рис. 11

Задача 2. Неидеальный газ

Теплоизолированный сосуд объема V_1 разделен перегородкой на две части. В части сосуда, имеющей объем V_2, находится ν молей сильно сжатого одноатомного газа при температуре T. В другой части сосуда вакуум. В некоторый момент перегородка разрушается. Определить установившуюся температуру газа T'. Известно, что при адиабатическом сжатии ν молей этого газа из сильно разреженного состояния с температурой T до объема V_1 над газом совершают работу A_1 и его температура становится T_1, а при сжатии до объема V_2 совершают работу A_2 и температура становится T_2.

Примечание. При сильном сжатии газа существенно взаимодействие между его молекулами. В выражении для внутренней энергии заданной массы газа появляется (по сравнению с идеальным газом) дополнительное слагаемое, однозначно определяемое объемом газа.

Задача 3. Конденсатор в масле

Незаряженный цилиндрический конденсатор высоты L, радиусы цилиндрических обкладок которого R и $R - d$ (причем $d \ll R,L$), опустили в конденсаторное масло плотности ρ и диэлектрической проницаемости ε так, как показано на рисунке. За счет сил поверхностного натяжения масло поднялось в зазоре между обкладками на высоту $L/4$. В следующий раз конденсатор зарядили и вновь опустили в масло. На этот раз масло поднялось на высоту $L/2$. Найдите заряд конденсатора Q.

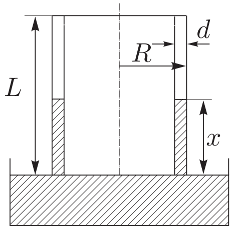


Рис. 12

Задача 4. Схема с конденсаторами

В схеме на рисунке конденсатор C_1 емкостью C заряжен до напряжения $U = 36$ В, а конденсатор C_2 емкостью $8C$ не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1. Затем замыкают ключ K_2, и в схеме возникают слабо затухающие колебания. Найдите для этих колебаний возможные значения (укажите интервал) начальной амплитуды напряжения на конденсаторе C_2.

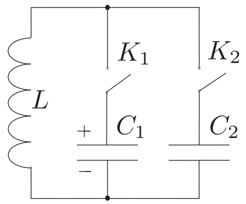


Рис. 13

Задача 5. Оптическая схема

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли рукопись с оптической схемой. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны некоторые лучи из пучка параллельных лучей, падающих на идеальную тонкую линзу, и пучок лучей, выходящих из точки A, находящейся в фокальной плоскости линзы. Из текста рукописи следовало, что путем изменения наклона линзы относительно падающего пучка Снеллиус добился того, что луч AB, проходящий через край линзы, претерпел наибольшее возможное отклонение. Известно, что диаметр линзы равен двум дюймам (на схеме размер одной клетки равен 0,5 дюйма). Найдите построением по этим данным положение линзы и главной оптической оси.

Примечание. Линза называется идеальной, если любой пучок параллельных лучей после прохождения линзы собирается в ее фокальной плоскости.

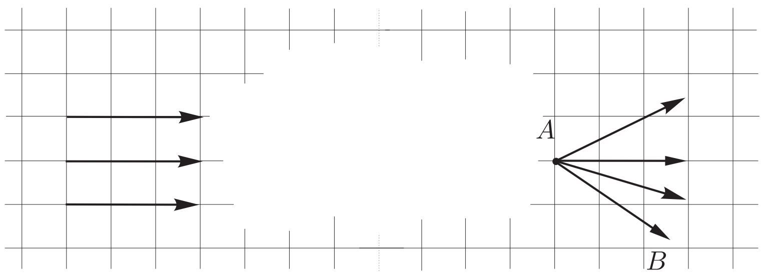


Рис. 14

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Плот

Пусть O — точка старта плота. В системе отсчета (СО), движущейся вниз по течению реки со скоростью u (в этой СО вода неподвижна), плот движется по прямой вдоль вектора $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}$.

Вектор $\vec{r}(t)$, соединяющий точку O с местом его нахождения в момент T в движущейся СО, направлен параллельно $\vec{v}$. В неподвижной СО вектор, соединяющий точку O с местом его нахождения, $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{u}t$. Проведем через точку, отмеченную на траектории плота крестиком, прямую параллельно $\vec{v}$. Точку пересечения этой прямой с берегом обозначим O_1, тогда $OO_1 = uT$. Отложим на луче OO_1 отрезки $OO_2 = 2uT$, $OO_3 = 3uT$ и $OO_4 = 4uT$. Через полученные точки O_2, O_3, O_4 проведем прямые параллельно $\vec{v}$. Точки пересечения этих прямых с траекторией плота будут соответствовать местам его нахождения в моменты времени $2T$, $3T$, $4T$.

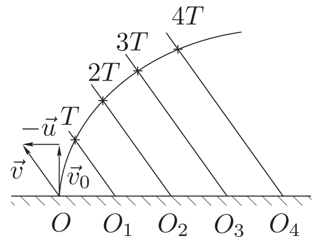


Рис. 15

Задача 2. Тело на плоскости

Тело совершает равнозамедленное движение с ускорением $-\mu g$ до полной остановки. Обозначим начальную скорость тела через v_0. Возможны следующие случаи:

(а) остановка произойдет на интервале времени $(0,t_1)$;
(б) тело остановится на интервале (t_1,t_1+t_2);
(в) тело будет продолжать двигаться до момента времени t_1+t_2.

Случай (а) возможен при $v_0 < \mu g t_1$, случай (б) — при $\mu g t_1 < v_0 < \mu g(t_1 + t_2)$, случай (в) — при $v_0 > \mu g(t_1+t_2)$.

В случае (а) тело за время t_1 проходит путь $s_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g} < \frac{\mu g t_1^2}{2}$, в случаях (б) и (в) — путь $s_1 = v_0 t_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} > \frac{\mu g t_1^2}{2}$. Таким образом, случай (а) реализуется при $s_1 \leqslant \frac{\mu g t_1^2}{2}$, в этом случае $s_2 = 0$.

Случаи (б) и (в) реализуются при $s_1 > \frac{\mu g t_1^2}{2}$. В этих случаях скорость тела при $t = 0$

$$v_0 = \frac{1}{t_1}(s_1 + \frac{\mu g t_1^2}{2}),$$

Скорость тела в момент времени t_1 равна $v_0 - \mu g t_1 = (s_1 - \mu g t_1^2/2)/t_1$. За последующий промежуток времени t_2 тело пройдет путь

$$s_2 = \frac{1}{2\mu g}\left(\frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2})\right)^2, \qquad \frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2}) \leqslant \mu g t_2$$

, или

$$s_2 = \left(\frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2})\right)t_2 - \frac{\mu g t_2^2}{2}, \qquad \frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2}) > \mu g t_2$$

Ответ: *при* $s_1 \leqslant \frac{\mu g t_1^2}{2}$ *путь* $s_2 = 0$;

при $\frac{\mu g t_1^2}{2} < s_1 \leqslant \frac{\mu g t_1^2}{2} + \mu g t_1 t_2$ *путь* $s_2 = \frac{1}{2\mu g}\left(\frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2})\right)^2$;

при $\frac{\mu g t_1^2}{2} + \mu g t_1 t_2 < s_1$ *путь* $s_2 = \left(\frac{1}{t_1}(s_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2})\right) t_2 - \frac{\mu g t_2^2}{2}$.

Задача 3. Вольтметры

Обозначим напряжения на вольтметрах через V_1, V_2, V_3. Поскольку сопротивления вольтметров много больше сопротивления всех резисторов, влиянием вольметров на напряжения на резисторах в схеме можно пренебречь. Поэтому напряжение между точками 1 и 2 равно, с одной стороны, нулю, а, с другой стороны, $V_1 - V_2$. Следовательно, $V_1 = V_2$. Напряжение между точками 2 и 3 равно $U/3$, или $V_2 + V_3$. Для токов, протекающих через точку 4

$$I_1 + I_2 = I_3,$$

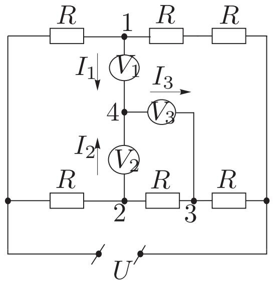


Рис. 16

откуда $V_1 + V_2 = V_3 = 2V_2$, так как сопротивления вольметров равны. Следовательно, $3V_2 = U/3$. Таким образом, показания вольтметров равны: $|V_1| = 0{,}5$ В, $|V_2| = 0{,}5$ В, $|V_3| = 1$ В.

Задача 4. Зеркала

Идущий от источника луч света может (Рис. 1):

— не отражаться от зеркал;
— отразиться только от зеркала 1;
— отразиться только от зеркала 2;
— отразиться от зеркал 1 и 2;
— отразиться от зеркал 2 и 1.

При этом в двух последних случаях луч света после отражений изменяет свое направление на противоположное, и поэтому в дальнейшем от зеркал он отражаться не будет.

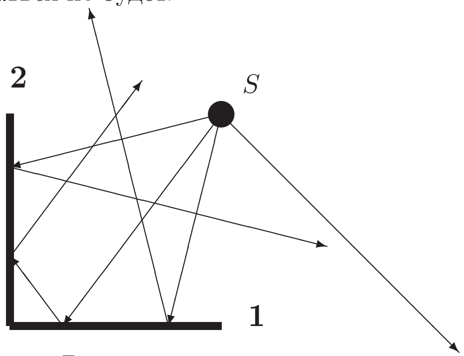


Рис. 1

В системе зеркал образуются следующие изображения источника света S:
- S_1 — при отражении в зеркале 1;
- S_2 — при отражении в зеркале 2;

- S_3 — при отражении сначала в зеркале 1, затем в зеркале 2 либо сначала в зеркале 2, а затем в зеркале 1.

Изображение S_1 будет наблюдаться в области 1 (Рис. 2), изображение S_2 — в области 2 (Рис. 3).

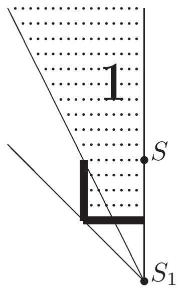


Рис. 2

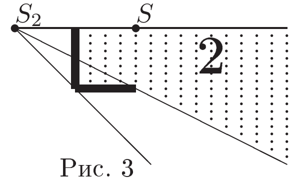


Рис. 3

Изображение S_3, полученное в результате отражения сначала от зеркала 1, затем от зеркала 2, будет наблюдаться в области 3a (Рис. 4); это же изображение, полученное в результате отражения сначала от зеркала 2, затем от зеркала 1, будет наблюдаться в области 3b (Рис. 5).

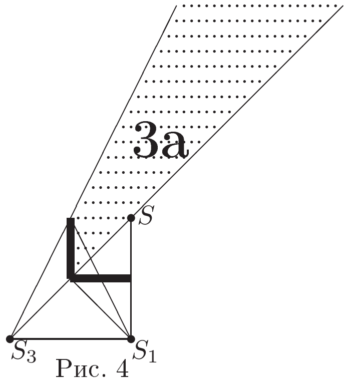


Рис. 4

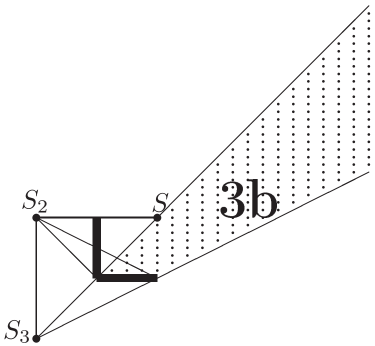


Рис. 5

Ответ к задаче представлен на рисунке 6, цифры показывают количество изображений, наблюдаемых в каждой из областей.

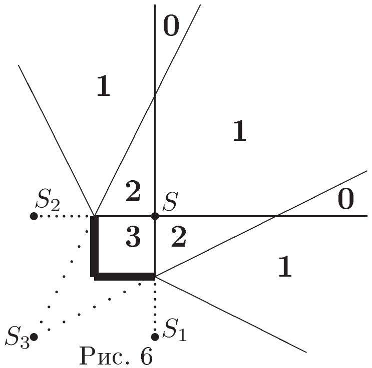


Рис. 6

10 класс

Задача 1. Электроманометр

Для малых изменений объема $\Delta W = -P\Delta V = -\Delta V R/k = -\Delta V \mathscr{E}/(Ik)$, откуда $\Delta V = -I\Delta W k/\mathscr{E}$. Вычисляя площадь левее графика, получаем: $V_Q = V_K - 1.79$ Дж·А$\times k/\mathscr{E} \approx 553$ мл.

Задача 2. Тело в воздушном потоке

Пусть α — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления воздуха и квадратом скорости тела относительно воздуха, $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\alpha|v_{\text{отн}}|\vec{v}_{\text{отн}}$, m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Тогда проекции ускорения тела на горизонтальную ось Ox и вертикальную ось Oy, направленную вниз, равны:

$$a_x = \frac{\alpha}{m}(u - v_x)\sqrt{(u - v_x)^2 + v_y^2}, \quad a_y = g - \frac{\alpha}{m}v_y\sqrt{(u - v_x)^2 + v_y^2}.$$

При малых временах полета ($v_x \ll u; v_y \ll u; \alpha v_y^2/m \ll g$) движение тела можно считать равноускоренным: $x \simeq \alpha u^2/t^2/2m, \quad y \simeq gt^2/2$, т.е $\operatorname{tg}\gamma = y/x = mg/(\alpha u^2)$. В установившемся режиме имеем: $v_x = u, g = \frac{\alpha}{m}v_y^2$, т.е. $v_y = \sqrt{mg/\alpha}$. Тем самым $\operatorname{tg}\beta = v_y/v_x = \sqrt{mg/(\alpha u^2)}$. Таким образом, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta$.

Задача 3. Вращающаяся система

В первом случае ускорение a_1 груза направлено вниз, так как нить вертикальна. В начальный момент скорость шариков равна нулю, поэтому ускорение a_A шарика A тоже направлено вниз. Рассмотрим перемещения шариков и груза за малое время Δt. Пусть длина нити равна L, тогда из условия ее нерастяжимости следует $L = L + a_1(\Delta t)^2/2 - a_A(\Delta t)^2/2$, откуда $a_A = a_1$. Пусть масса всех трех шариков равна M. По закону сохранения энергии $M(a_A\Delta t)^2/2 + m(a_1\Delta t)^2/2 = mga_1(\Delta t)^2/2$. После преобразования получим $Ma_1 + ma_1 = mg$, или

$$M/m = (g - a_1)/a_1.$$

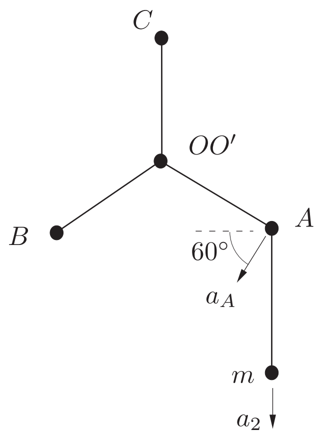


Рис. 17

Во втором случае из условия нерастяжимости нити $L^2 = (L + a_2(\Delta t)^2/2 - a_A'\sin 60°(\Delta t)^2/2)^2 + (a_A'\cos 60°(\Delta t)^2/2)^2$ следует $L^2 \approx L^2 + La_2(\Delta t)^2 - La_A'\sin 60°(\Delta t)^2$, откуда $a_2 = a_A'\sqrt{3}/2$, или $a_A' = 2a_2/\sqrt{3}$, где a_A' — ускорение шарика A во втором случае. По закону сохранения энергии: $M(a_A'\Delta t)^2/2 + m(a_2\Delta t)^2 = mga_2(\Delta t)^2/2$. С учетом выражения для a_A имеем $4/3Ma_2 + ma_2 = mg$, откуда $M/m = 3(g - a_2)/(4a_2)$. Приравнивая к выражению для M/m, полученному в первом случае, получим $a_2 = 3ga_1/(4g - a_1)$.

Задача 4. Брусок в конденсаторе

Воспользуемся законом сохранения энергии системы: источник, конденсатор, брусок. Работа источника идет на увеличение электрической энергии

конденсатора и кинетической энергии бруска: $(q - q_0)U = W - W_0 + mv^2/2$, где m — масса бруска, q — заряд конденсатора, $W - W_0$ — приращение энергиии конденсатора. Используя формулы $q = CU$ и $W = CU^2/2$, преобразуем выражение для энергии к виду $CU^2/2 - C_0U^2/2 = mv^2/2$, где C — емкость конденсатора в данный момент времени, а C_0 — в начале движения. Поскольку

$$C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 a^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 a^2}{2d} = \frac{(\varepsilon+1)\varepsilon_0 a^2}{2d},$$

то $mv^2/2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)(x - a/2)aU^2/(2d)$.

Если сравнить последнее выражение с формулой для кинетической энергии при равноускоренном движении без начальной скорости под действием постоянной силы F :

$$\frac{mv^2}{2} = F(x - x_0),$$

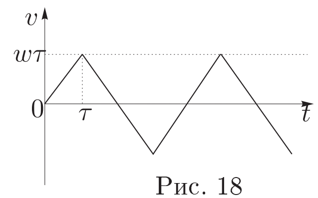


Рис. 18

то видно, что брусок движется с постоянным ускорением

$$w = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2d^2 a\rho}.$$

Он будет двигаться со скоростью $v = wt$ до момента времени $\tau = \sqrt{a/w}$. В этот момент брусок полностью втянется в конденсатор, и его скорость достигнет максимума. Затем она будет уменьшаться по линейному закону $v = w(2\tau - t)$ до момента времени 2τ. Затем все этапы движения повторятся в обратном направлении.

Задача 5. Черный ящик

Прежде чем решать задачу, докажем, что любую схему трехполюсника (A,B,C), состоящую из омических сопротивлений и соединительных проводов, можно свести к эквивалентной схеме (рис. 19), сопротивления r_A, r_B и r_C которой найдем, решив систему уравнений

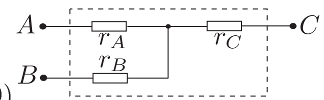


Рис. 19

$$r_A + r_B = R_{AB}, \qquad r_A + r_C = R_{AC}, \qquad r_B + r_C = R_{BC}.$$

Теперь приступим к решению задачи. Оставим свободным вывод D. В получившемся трехполюснике (A,B,C) сопротивление между выводами A и C неизвестно. Однако можно записать $R_{AC} = r_A + r_C \leqslant (r_A + r_B) + (r_C + r_B) = R_{AB} + R_{BC}$, или

$$R_{AC} \leqslant R_{AB} + R_{BC}. \quad (1)$$

Аналогичным образом для трехполюсника (A,C,D) можно получить $R_{AD} \leqslant R_{AC} + R_{CD}$, что эквивалентно соотношению

$$R_{AD} - R_{CD} \leqslant R_{AC}. \quad (2)$$

Объединим неравенства (1) и (2):

$$R_{AD} - R_{CD} \leqslant R_{AC} \leqslant R_{AB} + R_{BC}.$$

Численная подстановка дает: 68 кОм$\leqslant R_{AC} \leqslant 68$ кОм, то есть $R_{AC} = 68$ кОм.

11 класс

Задача 1. Лодка

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью реки u. В этой системе траектория лодки — некоторая прямая AB с тангенсом угла наклона $\operatorname{tg}\alpha = u/v_0$. Обозначим расстояние от точки A до проекции точки B на линию берега через x (где x — число клеток). Очевидно, что длина отрезка BD (в клетках) будет равна $x + 3$. Из подобия треугольников AFN и ABM найдем длину отрезка FN : $BM/FM = AM/AN = 3/2$. Следовательно, $FN = 2x/3$, а длина всего отрезка $FC = 2x/3 + 1$. Но длина отрезка FC в два раза меньше длины отрезка BD, поскольку это пути, пройденные рекой за 1 и за 2 сек, то есть $(x + 3)/(2x/3 + 1) = 2$. Отсюда $x = 3$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = x/6 = 1/2$. Поэтому скорость реки $u = v_0/2 = 0{,}5$ м/с.

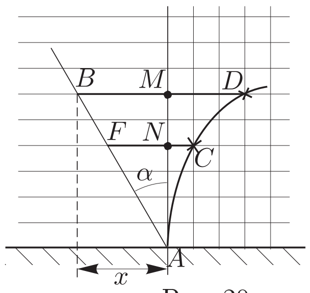


Рис. 20

Задача 2. Неидеальный газ

Пусть дополнительное слагаемое в выражении для внутренней энергии при объеме V_1 равно Π_1, а при объеме V_2 равно Π_2. Внутренняя энергия газа при указанных в скобках объеме и температуре

$$U(T,V_2) = \nu c_V T + \Pi_2,$$

$$U(T',V_1) = \nu c_V T' + \Pi_1,$$

$$U(T_1,V_1) = \nu c_V T_1 + \Pi_1,$$

$$U(T_2,V_2) = \nu c_V T_2 + \Pi_2.$$

Здесь $c_V = 3R/2$. Запишем уравнения для закона сохранения энергии в процессах при разрыве перегородки и при адиабатическом сжатии газа до объемов V_1 и V_2:

$$0 = U(T',V_1) - U(T,V_2) + 0,$$

$$0 = U(T_1,V_1) - \nu c_V T + (-A_1),$$

$$0 = U(T_2,V_2) - \nu c_V T + (-A_2).$$

Из всех записанных выше уравнений находим

$$T' = T + T_1 - T_2 + \frac{2(A_2 - A_1)}{3\nu R}.$$

Задача 3. Конденсатор в масле

Рассмотрим две части конденсатора, разделенные уровнем x поднявшегося масла, как параллельно соединенные конденсаторы. Поскольку $d \ll R,L$, то емкость конденсаторов можно найти как емкость плоских конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 S_2}{d} = \frac{2\pi R x \varepsilon\varepsilon_0}{d} + \frac{2\pi R(L-x)\varepsilon_0}{d} = \frac{2\pi\varepsilon_0 R((\varepsilon-1)x + L)}{d}.$$

Энергия заряженного конденсатора $W = Q^2/2C = Q^2 d/(4\pi\varepsilon_0 R((\varepsilon-1)x + L))$.

Электрическая сила, втягивающая масло,

$$F(x) = -\frac{dW}{dx} = \frac{(\varepsilon-1)Q^2 d}{4\pi\varepsilon_0 R((\varepsilon-1)x + L)^2}.$$

На поднявшееся масло действуют также сила тяжести $P(x) = 2\pi R x d\rho g$ и сила поверхностного натяжения $F_{\text{пов}}$, не зависящая от x. Запишем условия равновесия масла в обоих случаях: $F_{\text{пов}} = P(\frac{L}{4})$; $F_{\text{пов}} + F(\frac{L}{2}) = P(\frac{L}{2})$. Вычтем из второго уравнения первое и подставим выражения для F и P:

$$\frac{(\varepsilon-1)Q^2 d}{4\pi\varepsilon_0 R((\varepsilon-1)L/2 + L)^2} = 2\pi R d(L/2 - L/4)\rho g,$$

$$(\varepsilon-1)Q^2 = 8\pi^2\varepsilon_0 R^2 \rho g(L/4)(\varepsilon L + L/2)^2,$$

откуда $Q = \pi(2\varepsilon+1)RL\sqrt{\varepsilon_0\rho g L/(2\varepsilon-2)}$.

Задача 4. Схема с конденсаторами

Наименьшая возможная амплитуда колебаний U_1 на конденсаторе C_2 будет при замыкании ключа K_2 в момент, когда на конденсаторе C_1 напряжение максимальное, т.е. U_0. Конденсатор C_2 быстро зарядится и в схеме выделится энергия (тепло или излучение). При этом новое напряжение на конденсаторе и будет U_1. Так как заряд сохраняется, то $C_1U_0 = (C_1 + C_2)U_1$. Отсюда $U_1 = U_0C_1/(C_1 + C_2)$.

Наибольшая возможная амплитуда колебаний U_2 на конденсаторе C_2 будет при замыкании ключа K_2 при разряженном конденсаторе C_1. По закону сохранения энергии $C_1U_0^2/2 = (C_1+C_2)U_2^2/2$. Отсюда $U_2 = U_0\sqrt{C_1/(C_1 + C_2)}$. Искомый интервал $U_0C_1/(C_1 + C_2) \leqslant U \leqslant U_0\sqrt{C_1/(C_1 + C_2)}$. Окончательно 4 В$\leqslant U \leqslant$ 12 В.

Задача 5. Оптическая схема

Пусть δ — угол наибольшего отклонения, A — точка фокальной плоскости, O – оптический центр линзы, OC — ее радиус. Тогда из всех треугольников CAO наибольший угол при вершине A будет у равнобедренного треугольника ($CA = AO$). Заметим, что $\angle CAO = \delta$, как накрест лежащие углы.

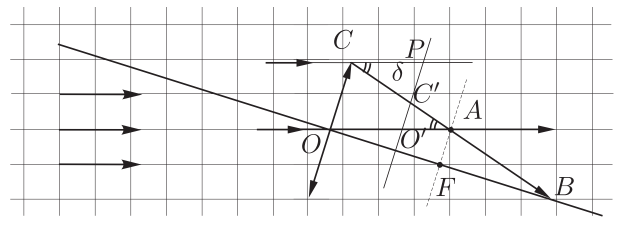


Рис. 21

Выполним необходимые построения на схеме из архива. Сделаем из точки A циркулем засечки на продолжении в сторону линзы луча AB и луча, проходящего через точку A параллельно падающему пучку. Пусть это будут точки

C' и O'; проведем через них прямую и отложим на этой прямой отрезок $O'P$ равный радиусу линзы. Край линзы — это точка C, которая расположена на пересечении прямой AB и прямой, параллельной AO' и проходящей через точку P. Сама линза параллельна прямой $C'O'$. Далее находим центр линзы O и главную оптическую ось OF.