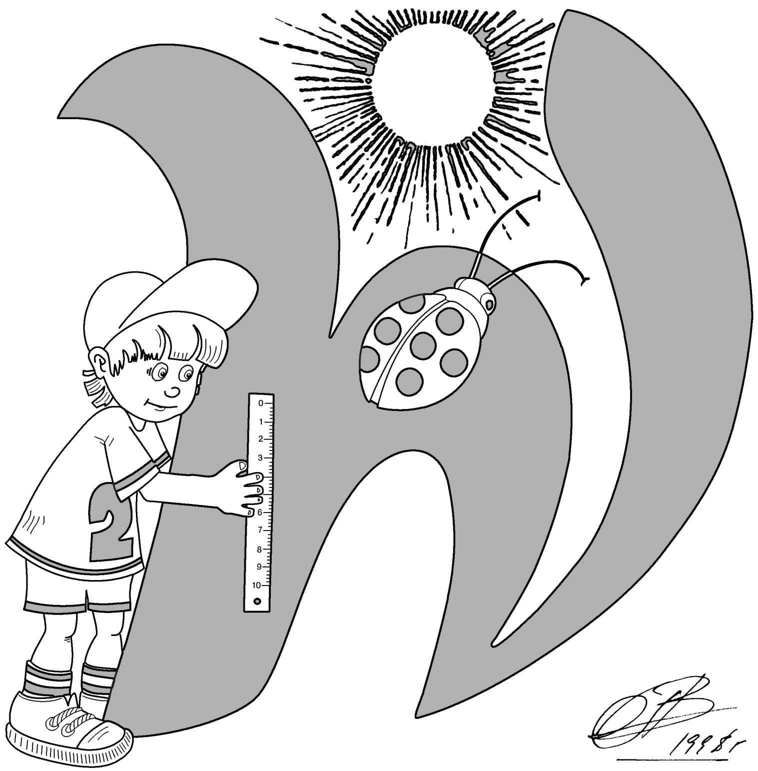
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Пермь, 1999/2000 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторский коллектив — Абанин Д., Александров Д., Бойко П., Варгин А., Дидовик А., Захарченко К., Имамбеков А., Качура Б., Ко́зел С., Компанеец Р., Макаров А., Можаев В., Орлов В., Пестун В., Полянский Ю., Слободянин В., Сырицын С., Чешев Ю., Чивилев В., Шеронов А.

Техническая редакция — Макаров А.

Оформление и верстка — Дидовик А., Макаров А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.
© Авторский коллектив
Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:40.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Брусок с моторчиком

К диску радиуса R, насаженному на горизонтальный вал мотора, под действием силы тяжести прижимается тяжелый брусок массой M. Брусок может свободно поворачиваться относительно оси O (рис. 1). Длина бруска равна L, его толщина h. Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии l от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском равен μ. Предполагая, что мотор может развивать мощность P, определите угловую скорость ω вращения диска в зависимости от величины l. Рассмотрите случаи вращения диска по (ω^{+}) и против (ω^{-}) часовой стрелки. Постройте качественные графики $\omega^{+}(l)$ и
$\omega^{-}(l)$.

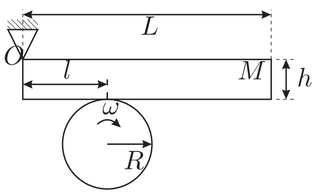


Рис. 1

Задача 2. Мыши-артиллеристы

Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако, камень, описав дугу, через $t_1 = 1\ 2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1\ 0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис. 2). На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд?

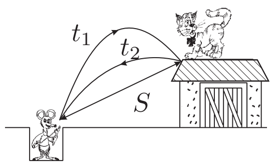


Рис. 2

Задача 3. Переохлажденная вода

Известно, что дистиллированную воду, очищенную от примесей, можно охладить без превращения в лед ниже температуры $t_0 = 0°$C. В зависимости от внешнего давления процесс кристаллизации воды может начаться при некоторой температуре $t_1 < t_0$. Образовавшийся при этом лёд отличается по своим физическим свойствам от обычного льда при температуре 0°C. Определите, чему равна удельная теплота плавления льда (λ_2) при температуре $t_1 = -10°$C. Удельную теплоемкость воды в интервале температур от $-10°$C до 0°C примите равной $c_1 = 4\ 17 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Удельную теплоемкость льда в этом интервале температур примите равной $c_2 = 2\ 17 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда при температуре 0°C равна $\lambda_1 = 3\ 32 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Задача 4. Черный ящик

Дан "черный ящик" с тремя выводами. Известно, что внутри ящика находится некоторая схема, составленная из резисторов (рис. 3). Если к выводам (1),(3) подключить источник напряжения $U = 15$ В и измерить с помощью вольтметра напряжения между выводами (1),(2) и (2),(3), то они оказываются равными $U_{12} = 6$ В и $U_{23} = 9$ В. Если источник напряжения подключить к выводам (2),(3), то $U_{21} = 10$ В, $U_{13} = 5$ В. Какими будут напряжения U_{13}, U_{32}, если источник подключить к выводам (1),(2)? Нарисуйте возможные схемы "черного ящика" с минимальным числом резисторов. Полагая, что наименьшее сопротивление из всех резисторов равно R, найдите сопротивления остальных резисторов.

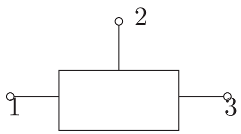


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Брусок на пружине

На гладкой горизонтальной поверхности колеблется на пружине вдоль оси Ox брусок. По направлению к бруску вдоль оси Ox движется со скоростью v_0 шарик (рис. 4), который после упругого удара о брусок отскакивает в противоположном направлении. Масса шарика во много раз меньше массы бруска. График зависимости координаты x бруска от времени t представлен на рисунке (рис. 5).

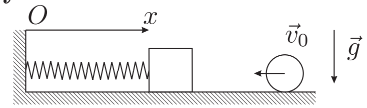


Рис. 4

1. Используя график, найдите максимально возможную скорость шарика после отскока при $v_0 = 0\ 06$ м/с.
2. При каких значениях v_0 разность Δ между максимально возможной скоростью отскока и v_0 не будет зависеть от v_0? Найдите эту разность.

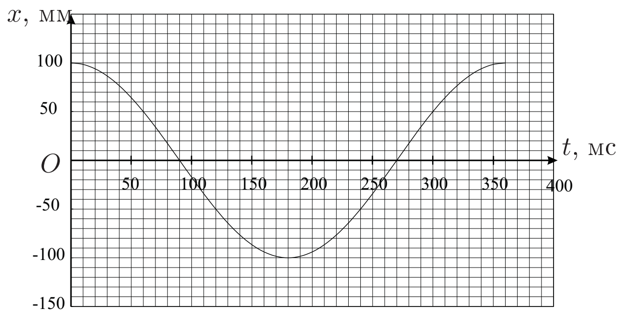


Рис. 5

Задача 2. Локомотив

Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (рис. 6). Масса локомотива равна m, а его порядковый номер — первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже равна m.

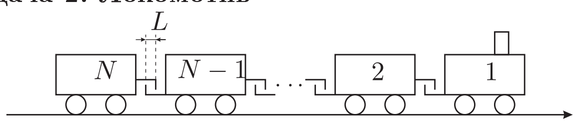


Рис. 6

1. Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.
2. Полагая, что состав очень длинный $(N \to \infty)$, определите предельную скорость v_∞ локомотива.

Задача 3. Растворение

В воду массой m бросают вещество такой же массы, обладающее следующими свойствами:

1. При растворении в воде вещество поглощает энергию λ на каждый килограмм, причем $\lambda/c = 200$ К, где c — удельная теплоемкость вещества, которая равна теплоемкости воды и не меняется при растворении.

2. Растворимость α вещества в воде, определяемая как отношение масс растворенного вещества к массе растворителя $\alpha = m_{\text{вещ}}/m_{\text{раств}}$, в насыщенном растворе зависит от температуры (см. график).

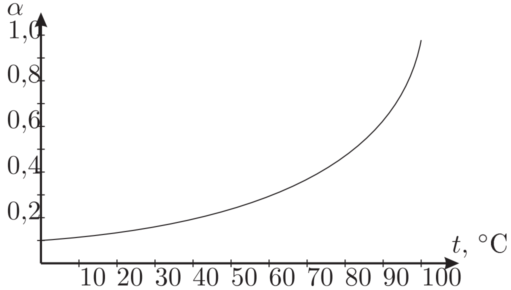


Рис. 7

Начальная температура вещества равна +200°C, воды — 0°C. Определите установившуюся температуру раствора $t_{\text{уст}}$ и конечную концентрацию $\alpha_{\text{уст}}$. Тепловыми потерями и испарением пренебречь.

Задача 4. Неидеальный газ

Кривая ABC (рис. 8) является адиабатой для некоторого вещества, у которого внутренняя энергия зависит от произведения $p \cdot V$, т.е. $U = U(p \cdot V)$. Найдите полное количество тепла, которое тело получило в процессе 1 – 2, изображенном на рисунке.

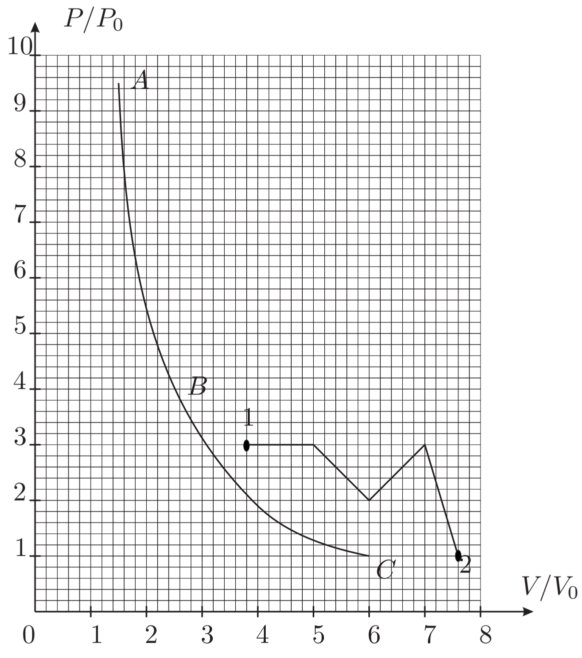


Рис. 8

Задача 5. Электрическая схема

В электрической цепи, представленной на рисунке, ключ K разомкнут и токи не текут. Определите:

1. Токи через батареи $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ сразу после замыкания ключа K.

2. Изменение электростатической энергии ΔW системы после прекращения токов.

3. Работы A_1 и A_2 батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ за все время процесса.

4. Количество теплоты Q, выделившееся на резисторах после замыкания ключа K.

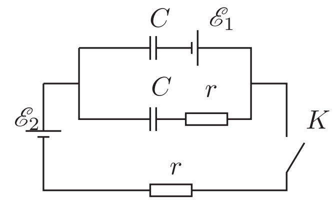


Рис. 9

11 класс

Задача 1. Сломанный конвейер

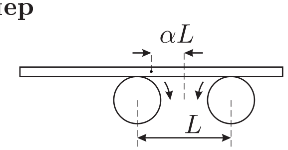


Рис. 10

На два вращающихся в противоположных направлениях цилиндрических валика радиусом $R = 0{,}5$ м положили длинный однородный брус (рис. 10) так, что его центр масс оказался смещенным от оси симметрии на αL, где $\alpha = 3/8$, а $L = 2$ м — расстояние между осями валиков. Затем брус без толчка отпускают. Коэффициент трения между брусом и валиками равен $k = 0{,}3$ и не зависит от их относительной скорости. Угловая скорость вращения валиков равна $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$. После того, как колебания установились, угловую скорость вращения валиков уменьшили в 10 раз. Найдите частоту Ω и амплитуду A_2 новых установившихся колебаний бруса.

Задача 2. Бусинка

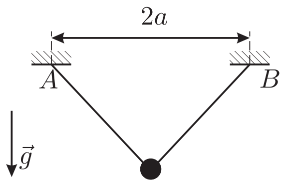


Рис. 11

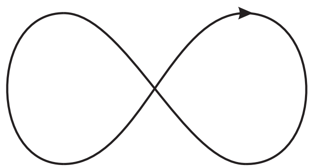


Рис. 12

К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние $2a$, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис. 11). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.

1. Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

2. Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

3. При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь следующий вид (рис. 12)1?

Примечание. При решении задачи Вам может оказаться полезной формула $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$ при $x \ll 1$.

Задача 3. Неидеальный газ

Кривая ABC (рис. 13) является адиабатой для некоторого вещества, у которого внутренняя энергия зависит от произведения $p \cdot V$, т.е. $U = U(p \cdot V)$. Найдите полное количество тепла, которое тело получило в процессе 1 – 2, изображенном на рисунке.

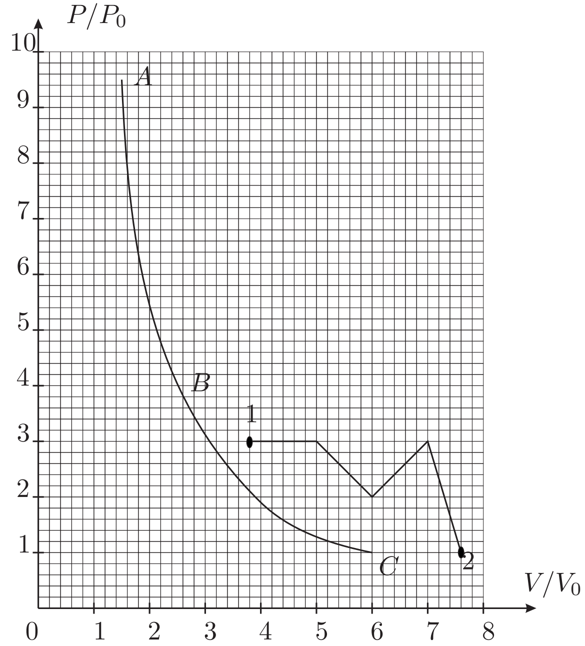


Рис. 13

Задача 4. Электростатический вольтметр

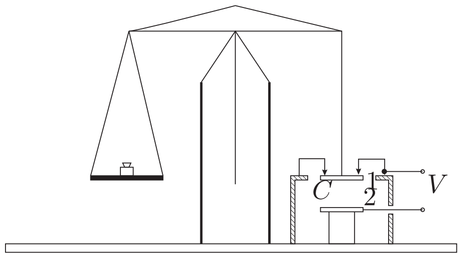


Рис. 14

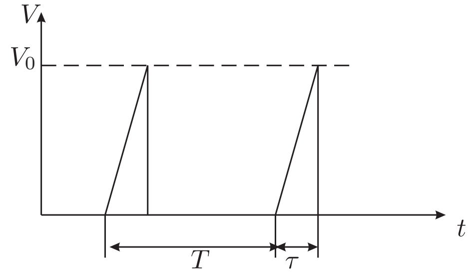


Рис. 15

В электростатическом вольтметре сила притяжения между металлическими пластинами плоского конденсатора C измеряется с помощью аналитических весов (рис. 14). При постоянном напряжении $V_1 = 500$ В между пластинами 1 и 2 весы уравновешиваются разновесом массой $m_1 = 200$ мг. На пластины конденсатора подается периодическая последовательность треугольных импульсов напряжения с длительностью $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с и периодом повторения $T = 0\,01$ с (рис. 15). Чему равна амплитуда импульсов V_0, если в этом случае весы уравновешиваются разновесом массой $m_2 = 30$ мг? Период собственных колебаний весов много больше T.

Задача 5. Схема с катушкой

В электрической цепи с мостиком Уитстона, изображенной на рис., после установления всех токов размыкают ключ K. Определите, при какой величине сопротивлений R_1 через микроамперметр с внутренним сопротивлением r после размыкания ключа K протечет наибольший заряд Q. Все остальные параметры электрической цепи, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника напряжения и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

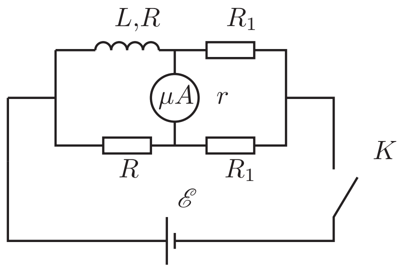


Рис. 16

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Брусок с моторчиком

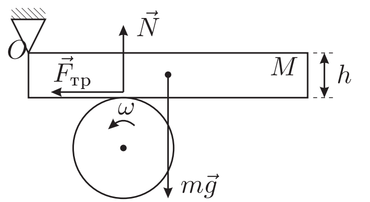


Рис. 17

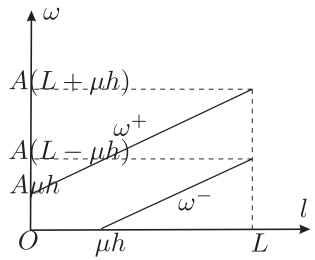


Рис. 18

Рассмотрим случай вращения диска против часовой стрелки (рис. 17). Условие равновесия бруска:

$$F_{тр} \cdot h + Mg\frac{L}{2} = Nl,$$

где $F_{тр} = \mu N$. Отсюда

$$F_{тр} = \frac{MgL\mu}{2(l-\mu h)}.$$

При установившейся скорости вращения $P = F_{тр}R\omega^-$. Следовательно,

$$\omega^- = \frac{P}{F_{тр} \cdot R} = \frac{2P}{RMgL\mu}(l-\mu h) = A(l-\mu h),$$

где $A = \frac{2P}{RMgL\mu}$. Решение задачи существует при $l > \mu h$. При $l \leqslant \mu h$ происходит “заклинивание”, мотор не может провернуть диск. Для вращения по часовой стрелке можно получить $\omega^+ = A(l+\mu h)$ — “заклинивания” нет. График $\omega^+(l)$ и $\omega^-(l)$ имеют следующтй вид (рис. 18).

Задача 2. Мыши-артиллеристы

Пусть $\vec{u}_0$ — вектор начальной скорости камня, $\vec{u}_к$ — вектор скорости камня в момент его попадания в лапу мышонка. Направим ось Ox вдоль ската крыши, ось Oy перпендикулярно ей через лапу мышонка (рис. 19). Из закона сохранения энергии следует

$$|\vec{u}_0| = |\vec{u}_к|.$$

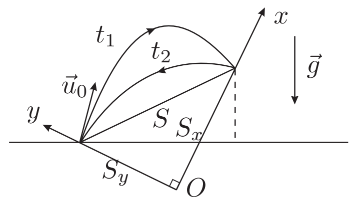


Рис. 19

Проекция вектора скорости камня на ось Ox непосредственно перед ударом о скат крыши равна проекции скорости на эту же ось сразу после удара. Тогда

$$|u_{0x}| = |u_{кx}|.$$

Из (1) и (2) следует, что $|u_{0y}| = |u_{\text{ку}}|$. В проекциях на оси Ox и Oy можно записать

$$u_{0x}t + g_x t^2/2 = s_x,$$

$$u_{0y}t + g_y t^2/2 = s_y,$$

где g_x и g_y — проекции $\vec{g}$ на соответствующие оси.

По теореме Виета уравнения (3) и (4) можно преобразовать к виду

$$s_x = -g_x t_1 t_2/2,$$

$$s_y = -g_y t_1 t_2/2.$$

Тогда $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = g t_1 t_2/2$.

Задача 3. Переохлажденная вода

Решение задачи поясняет рисунок.

$$\lambda_1 m + c_2 m\Delta t = \lambda_2 m + c_1 m\Delta t.$$

Отсюда следует, что $\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)\Delta t = 3\,12 \cdot 10^5$ Дж/кг.

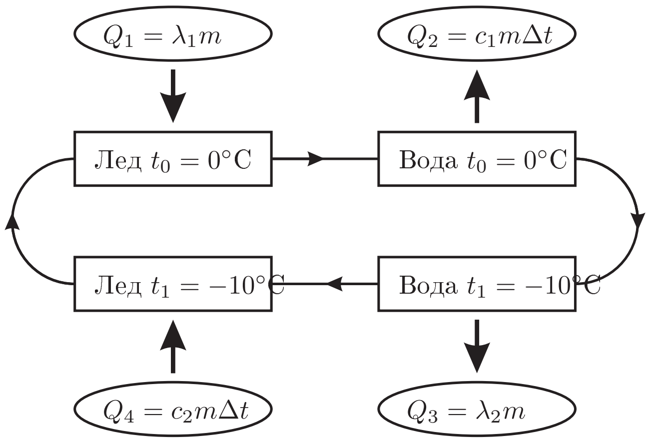


Рис. 20

Задача 4. Черный ящик

Рассмотрим соединение “треугольником” (рис. 21). Тогда при подключении источника питания к клеммам 1,3 по ветви 1–2–3 будет течь ток I, поэтому $U_{12} = Ir_{12}$, а $U_{23} = Ir_{23}$. Отсюда, $\frac{r_{12}}{r_{23}} = \frac{U_{12}}{U_{23}} = \frac{6}{9}$. Аналогично, для случая подключения источника питания к выходам 2,3 можно записать $\frac{r_{12}}{r_{13}} = \frac{U_{21}}{U_{13}} = \frac{10}{5}$. Тогда получим $r_{13} < r_{12} < r_{23}$. Значит, $r_{13} = R$, $r_{12} = 2R$, а $r_{23} = 3R$.

Для соединения “звездой” (рис. 22) получаем, что при подключении источника питания к клеммам 1 и 3 ток I_{13} идет только по ветви 1–0–3, поэтому

$$U_{12} = I_{13}r_1, \quad U_{23} = I_{13}r_3,$$

а при подключении к выходам 2,3 $U_{21} = I_{13}r_2$ и $U_{13} = I_{13}r_3$. Отсюда $r_1 < r_3 < r_2$, значит $r_1 = R$, $r_3 = \frac{3}{2}R$, а $r_2 = 3R$. Эти две схемы полностью эквивалентны, поэтому напряжения U_{13} и U_{23} можно вычислять по любой из них. Воспользуемся схемой “звезда”:

$$U_{13} = Ir_1, \quad U_{23} = Ir_2, \quad U_{13} + U_{23} = U.$$

Отсюда получаем $\frac{U_{23}}{U_{13}} = \frac{3}{1}$ и $U_{13} = 15/4 = 3\,75$ В, $\quad U_{23} = 45/4 = 11\,25$ В.

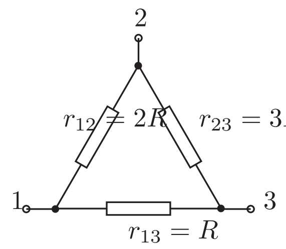


Рис. 21

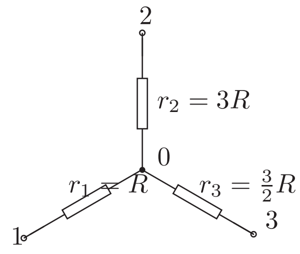


Рис. 22

10 класс

Задача 1. Брусок на пружине

1. $v = 2\ 1$ м/с
2. $v_0 > 0\ 38$ м/с, $\Delta = 3\ 5$ м/с

По наклону касательной к графику в точке C его пересечения с осью t (рис. 23) находим максимальную скорость бруска: $u_m = 1\ 75$ м/с. Так как u_m значительно больше v_0, то шарик не достигнет бруска в момент, когда скорость бруска u_m. Ответим на вопросы задачи графическим методом. 1. Временная зависимость координаты шарика $x(t)$ есть набор прямых с наклоном, определяемым значением $v_0 = 0\ 06$ м/с.

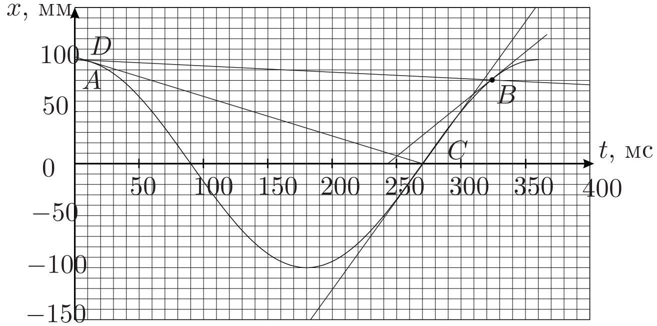


Рис. 23

Максимально возможной скорости u бруска при ударе соответствует прямая AB, касающаяся графика в т. A и пересекающая его в т. B. Проведя касательную к графику в т. B, находим $u = 1\ 03$ м/с. Максимально возможная скорость отскока $v = v_0 + 2u \approx 2\ 1$ м/с

2. Δ не будет зависеть от v_0, если прямая, выражающая зависимость $x(t)$ для шарика, пройдет через точку C и не будет пересекать график вблизи $t = 0$, т. е. прямая $x(t)$ будет круче, чем прямая DC, касающаяся графика вблизи т. A. Это будет при $v_0 > 0\ 38$ м/с. При этом $\Delta = 2u_m = 3\ 5$ м/с.

Задача 2. Локомотив

Пусть v'_i — скорость части состава из i вагонов сразу после вовлечения в движение i-ого вагона, а v_i — скорость части состава из i вагонов перед ударом с $i+1$ вагоном. Из закона сохранения импульса $(i+1)mv'_{i+1} = imv_i = p_i$.

По второму закону Ньютона

$$a_{i+1} = \frac{F}{(i+1)m}. \qquad (1)$$

По известному кинематическому соотношению

$$a_{i+1}L = \frac{v_{i+1}^2 - {v'}_{i+1}^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим

$$v_{i+1}^2 = \frac{2FL}{(i+1)m} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 v_i^2,$$

$$p_{i+1}^2 = 2(i+1)mFL + p_i^2.$$

Из полученной рекурентной формулы следует

$$p_N^2 = 2mFL\sum_{i=1}^{N} i + p_0^2$$

и, так как $p_0 = 0$, то

$$p_N^2 = 2mFL\frac{N(N+1)}{2}, \quad v_N = \sqrt{\frac{FL}{m}}\sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Найдем время вовлечения в движение N вагонов:

$$v_i - v'_i = a_i \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = (v_i - v'_i)/a_i = \frac{m}{F}(iv_i - iv'_i) = \frac{m}{F}[iv_i - (i-1)v_{i-1}],$$

$$t_N = \frac{m}{F}\sum_{i=1}^{N-1}[iv_i - (i-1)v_{i-1}] = \frac{m}{F}[(N-1)v_{N-1} - 0v_0] = \frac{m}{F}v_{N-1}(N-1).$$

Используя полученное ранее выражение для v_N найдем

$$t_N = \sqrt{\frac{mL}{F}}N\sqrt{1 - \frac{1}{N}}.$$

Задача 3. Растворение

Из закона сохранения энергии

$$Q_{\text{раст}} = Q_1 + Q_2.$$

$Q_{\text{раст}}$ — теплота, ушедшая на растворение вещества. Q_1 — теплота, выделившаяся при остывании воды (возм., $Q_1 < 0$)). Q_2 — теплота, выделившаяся при остывании вещества.

$$Q_{\text{раст}} = \lambda m_{\text{раств. в-ва}} = \lambda m_{\text{растворителя}}\alpha = \lambda m\alpha,$$

$$Q_1 = cm_{\text{воды}}(t_1 - \theta) = cm(t_1 - \theta),$$

$$Q_2 = cm_{\text{в-ва}}(t_2 - \theta) = cm(t_2 - \theta),$$

$$\lambda\alpha m = cm(t_1 - \theta) + cm(t_2 - \theta), \quad \alpha = \frac{c}{\lambda}(t_1 + t_2 - 2\theta)$$

$\alpha(\theta)$ — это уравнение прямой: $\alpha(0°C) = 1, \quad \alpha(100°C) = 0.$

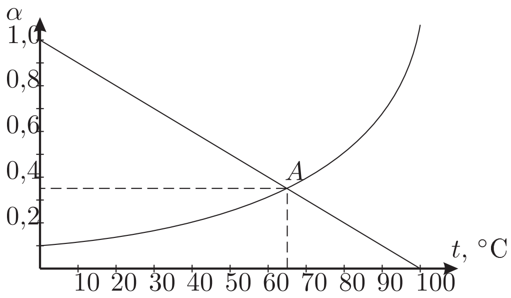


Рис. 24

Уравнение решается графически:

$$t_A \approx 65°C, \quad \alpha_A \approx 0{,}35.$$

Задача 4. Неидеальный газ

Первый закон термодинамики $\delta Q = pdV + dU$ для процесса 1–2 приводит к выражению:

$$Q_{12} = \int\limits_{(1)}^{(2)} pdV + U(2) - U(1).$$

Интеграл $\int\limits_{(1)}^{(2)} pdV$ равен площади S_1 под графиком процесса 1 – 2.

Так как U зависит только от pV, то $U = \text{const}$ на гиперболах $pV = \text{const}$. Проведем гиперболы через точки 1 и 2 и найдем пересечения с кривой адиабаты — точки 1^* и 2^*:

$$U(1) = U(1^*), \quad U(2) = U(2^*).$$

Для адиабаты $0 = Q_{1^*2^*} = \int\limits_{(1^*)}^{(2^*)} pdV + U(2^*) - U(1^*)$ получим

$$U(2^*) - U(1^*) = -S_2,$$

где S_2 — площадь под графиком адиабаты. Тогда получаем, что $Q_{12} = S_1 - S_2$. Подсчитав площади S_1 и S_2 найдем

$$S_1 = 9{,}8 p_0 V_0, \quad S_2 = (7{,}8 \pm 0{,}2) p_0 V_0,$$

$$Q_{12} = (2{,}0 \pm 0{,}2) p_0 V_0.$$

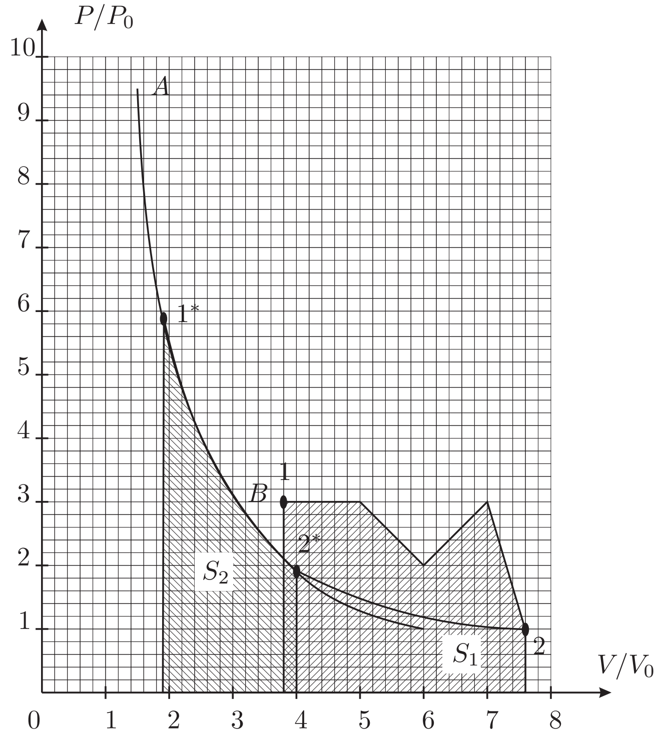


Рис. 25

Задача 5. Электрическая схема

1. До замыкания ключа K на кондесаторах были одинаковые разности потенциалов $U_0 = \mathscr{E}_1/2$ и заряды $q_0 = C\mathscr{E}_1/2$. Полярность указана на рисунке (рис. 26).

2. В момент замыкания заряды конденсаторов и напряжения на них не могут мгновенно измениться. В цепи появляются токи I, I_1, и I_2 (рис. 27). Согласно законам Кирхгофа:

$$IR = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1 - U_0 \Rightarrow I = \frac{\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1/2}{R}.$$

Здесь I — ток через $\mathscr{E}_2$. Далее

$$I_2 R + IR = \mathscr{E}_2 + U_0,$$

$$I_2 = -I + \frac{\mathscr{E}_2 + U_0}{R} = -\frac{\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1/2}{R} + \frac{\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1/2}{R} = 0.$$

Следовательно $I_1 = I = \frac{\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_1/2}{R}$, где I_1 — ток через $\mathscr{E}_1$.

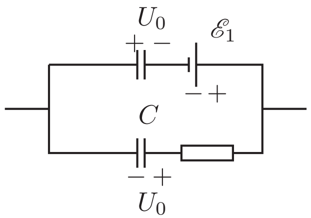


Рис. 26

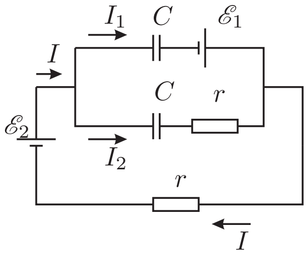


Рис. 27

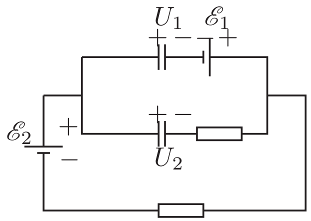


Рис. 28

3. Начальная энергия системы $W_0 = 2CU_0^2/2 = C\mathscr{E}_1^2/4$. В конечном состоянии (т. е. после затухания токов) напряжения на конденсаторах равны $U_1 = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1$ и $U_2 = \mathscr{E}_2$. Полярность указана на рисунке (рис. 28). Энергия системы в конечном состоянии есть:

$$W = \frac{C\mathscr{E}_2^2}{2} + \frac{C(\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_1)^2}{2}.$$

4. Изменение энергии

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{C\mathscr{E}_2^2}{2} + \frac{C\mathscr{E}_2^2}{2} + \frac{C\mathscr{E}_1^2}{2} + C\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \frac{C\mathscr{E}_1^2}{4} = C\mathscr{E}_2^2 + \frac{C\mathscr{E}_1^2}{4} + C\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 = \frac{C}{4}(\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2$$

5. До замыкания ключа К суммарный заряд на левых обкладках конденсаторов был равен нулю. В конечном состоянии

$$q_1 = C(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)$$
$$q_2 = C\mathscr{E}_2$$

Отсюда:

$$q = q_1 + q_2 = C(\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2).$$

Это означает, что через батарею $\mathscr{E}_2$ протек заряд q и батарея совершила работу

$$A_2 = q\mathscr{E}_2 = C\mathscr{E}_2(\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2).$$

Через батарею $\mathscr{E}_1$ протек заряд

$$\Delta q = q_1 - q_0 = C(\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1) - \frac{C\mathscr{E}_1}{2} = \frac{C(2\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1)}{2}.$$

Батарея совершила работу

$$A_1 = \Delta q\mathscr{E}_1 = \frac{C\mathscr{E}_1(2\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1)}{2}.$$

Обе батареи совершили работу $A = A_1 + A_2 = C(\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2)^2/2$.

6. По закону сохранения энергии $A = \Delta W + Q$, где Q — выделившееся тепло.

$$Q = A - \Delta W = \frac{C(\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2)^2}{4}.$$

11 класс

Задача 1. Сломанный конвейер

Обозначим через x смещение центра масс, N_i — реакции опор (рис. 29). Запишем второй закон Ньютона и уравнение моментов относительно центра масс:

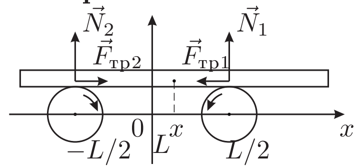


Рис. 29

$$N_1 + N_2 = Mg,$$

$$N_1(L/2 - x) = N_2(L/2 + x).$$

Предположим, что проскальзывание есть на обоих валиках. Тогда

$$F_{\text{тр}} = k(N_1 - N_2) = -kMg2x/L.$$

Из второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось следует, что брус совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{2kg/L} = 1{,}72\ \text{с}^{-1}.$$

При этом $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t), V(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)$, причем максимальное по модулю значение скорости составляет

$$V_{\max} = x_0\omega_0 = 1{,}29\ \text{м/с} < \omega R = 5\ \text{м/с}.$$

Следовательно, предположение об относительном проскальзывании выполнено. При уменьшении ω в 10 раз $\omega_{\text{new}}R = 0{,}5$ м/с $< V_{\max}$, поэтому амплитуда будет уменьшаться, пока $V_{\max}$ не станет равным $\omega_{\text{new}}R$. Амплитуда новых установившихся колебаний будет равна $\omega R/\omega_0 = 0{,}29$ м.

Задача 2. Бусинка

1. В первом случае происходят колебания математического маятника с длиной подвеса $b = \sqrt{l^2 - a^2}$:

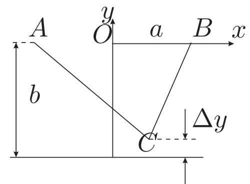


Рис. 30

$$\omega_\perp^2 = \frac{g}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

2. Так как нить нерастяжимая, то $AC + CB = 2l$. Следовательно, во втором случае бусинка C движется по эллипсу с фокусами A и B. Длина малой полуоси $b = \sqrt{l^2 - a^2}$, большой полуоси — l. Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \approx -b + \frac{bx^2}{2l^2}.$$

Тогда получим:$\Delta y \approx bx^2/(2l^2)$. Значит, потенциальная энергия

$$\Pi = mg\Delta y \approx \frac{1}{2}mgb\frac{x^2}{l^2},$$

$$T \approx \frac{1}{2} m \cdot x^2.$$

Таким образом, $\omega_\parallel^2 \approx gb/l^2$, то есть $\omega_\parallel^2 \approx g\sqrt{l^2 - a^2}/l^2$.

3. Из картинки видно, что $\frac{\omega_\perp}{\omega_\parallel} = 2$. Отсюда получаем:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} l.$$

Задача 3. Неидеальный газ

См. 4 задачу 10 класса

Задача 4. Электростатический вольтметр

При постоянном напряжении:

$$F_1 = m_1 g = \frac{\varepsilon_0 S}{2d^2} V_1^2.$$

При периодической последовательности импульсов:

$$F_2 = m_2 g = \frac{\varepsilon_0 S}{2Td^2} \int\limits_0^\tau \left(\frac{V_0}{\tau} t\right)^2 dt = \frac{\varepsilon_0 S V_0^2 \tau}{6Td^2} = \frac{F_1 V_0^2 \tau}{3TV_1^2}.$$

Отсюда:

$$V_0 = V_1 \sqrt{\frac{3Tm_2}{\tau m_1}} = 1500 \text{ В}.$$

Задача 5. Схема с катушкой

Перед размыканием ключа K в установившемся режиме через катушку L течет постоянный ток

$$I_{L1} = \mathscr{E}/(R + R_1).$$

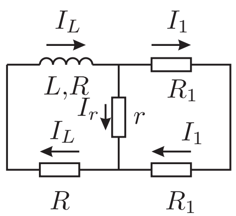


Рис. 31

Пусть после размыкания ключа K в произвольный момент времени в цепи текут токи, изображенные на рисунке.

По правилам Кирхгофа можно записать систему уравнений:

$$I_L = I_r + I_1,$$

$$2I_1R_1 - I_r r = 0,$$

$$L\frac{dI_L}{dt} + 2I_L R + I_r r = 0.$$

Из (1) и (2) найдем, что $I_L = I_r(r + 2R_1)/(2R_1)$. После подстановки этого выражения в (3) получим:

$$\frac{dI_L}{dt} = -\frac{rR + R_1(2R + r)}{LR_1} I_r.$$

Заряд, протекший через микроамперметр, за время dt:

$$dQ = -\frac{LR_1}{rR + R_1(2R + r)} dI_L.$$

Поскольку конечный ток через катушку $I_{L2} = 0$, то полное изменение тока равно $-\mathscr{E}/(R1 + R)$, а полный заряд равен

$$Q = \frac{\mathscr{E} L}{2R(R + r) + (2R + r)R_1 + rR^2/R_1}.$$

Q достигает максимального значения, когда $(2R + r)R_1 + rR^2/R_1$ минимально. А это имеет место при $(2R + r)R_1 = rR^2/R_1$. Это можно получить, продифференцировав знаменатель выражения для Q по R_1 и приравняв производную нулю.

Ответ: $R_1 = R\sqrt{\dfrac{r}{r + 2R}}$.